

Aufgabenzettel – Induktion (Rotierende Spule) - Lösung

Im Jahr 1820 machte der dänische Physiker Hans-Christian Ørsted eine bahnbrechende Entdeckung: Er fand heraus, dass elektrischer Strom in Leitern und Spulen magnetische Effekte hervorruft. Diese Entdeckung weckte das Interesse von Michael Faraday (1791 – 1867), der tief von dem Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus beeindruckt war. Faraday war so inspiriert, dass er sich zwei Jahre später das ambitionierte Forschungsziel setzte, Magnetismus in Elektrizität umzuwandeln. Es dauerte bis 1831, also neun Jahre später, bis Faraday das Phänomen der elektromagnetischen Induktion entdeckte. Diese Entdeckung bildet die Basis für zahlreiche elektrische Geräte wie Generatoren und Transformatoren und unterstreicht die immense Bedeutung des Faraday'schen Induktionsgesetzes.

a) Beschreiben Sie zwei grundverschiedene Methoden zur Erzeugung von Induktionsspannungen.

Grundsätzlich existieren zwei verschiedene Methoden zur Erzeugung von Induktionsspannungen:

1. Eine zeitliche Veränderung der Intensität der magnetischen Flussdichte B , die eine Spule mit einer (unveränderlichen) Fläche A durchdringt.
2. Eine zeitliche Veränderung der (effektiven) Größe einer Fläche A , die von einer zeitlich unveränderlichen magnetischen Flussdichte B durchdrungen wird.

b) Geben Sie für beide Methoden zur Erzeugung von Induktionsspannungen eine mathematische Formel des Induktionsgesetzes an.

1. Änderung der magnetischen Flussdichte:

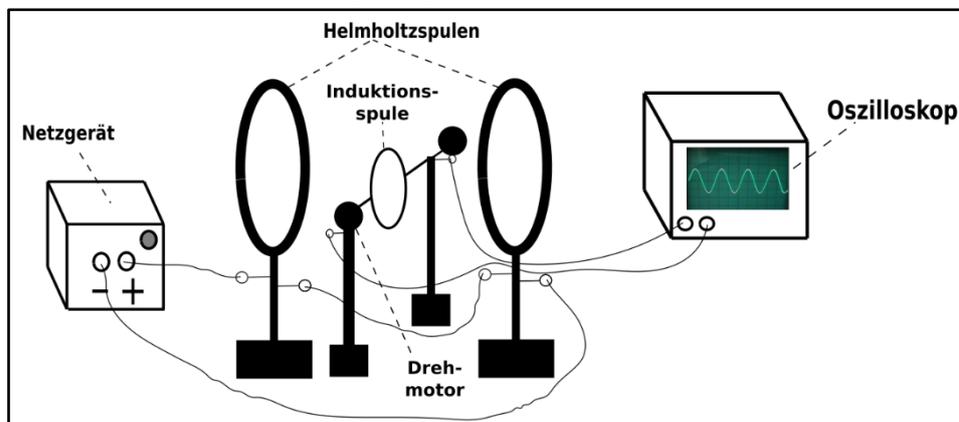
$$U_{\text{ind}} = -n \cdot A \cdot \dot{B}$$

2. Änderung der von der magnetischen Flussdichte durchsetzten Fläche:

$$U_{\text{ind}} = -n \cdot B \cdot \dot{A}$$

In den nachfolgenden zwei Aufgabenteilen wird das Induktionsgesetz mittels des folgenden Experiments untersucht. Dabei wird eine runde Spule aus Kupferlackdraht, die sich im homogenen Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares befindet, so montiert, dass ihre Drehachse

rechtwinklig zu den Feldlinien steht. Die Spule ist mit einem Oszilloskop verbunden. So



lässt sich der zeitliche Verlauf der induzierten Spannung erfassen. Ein steuerbares Netzgerät ermöglicht es, periodisch variierende Ströme durch das Helmholtz-Spulenpaar zu leiten, wodurch ein sich periodisch änderndes Magnetfeld der Stärke B erzeugt wird.

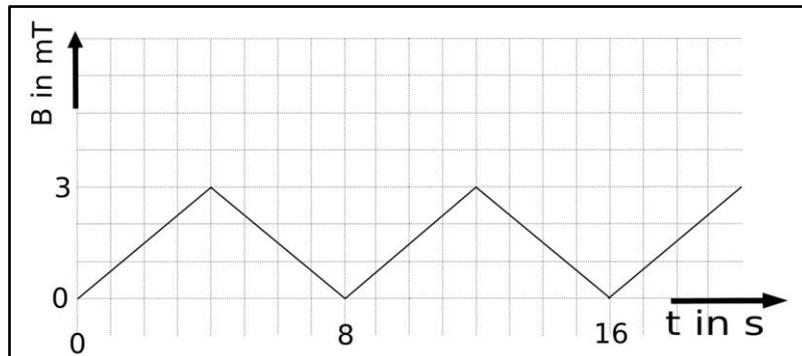
Außerdem kann die Induktionsspule durch einen Drehmotor mit einer konstanten Drehgeschwindigkeit betrieben werden.

In allen Experimenten dieser Teilaufgabe bleibt die Induktionsspule, wie in Abbildung dargestellt, fixiert. Mittels der steuerbaren Stromquelle wird dann die Intensität des homogenen Magnetfeldes innerhalb des Helmholtz-Spulenpaares periodisch variiert.

c) Erläutern Sie, welche spezifische Aussage des Induktionsgesetzes aus Teilaufgabe b) durch diesen Versuch getestet werden kann.

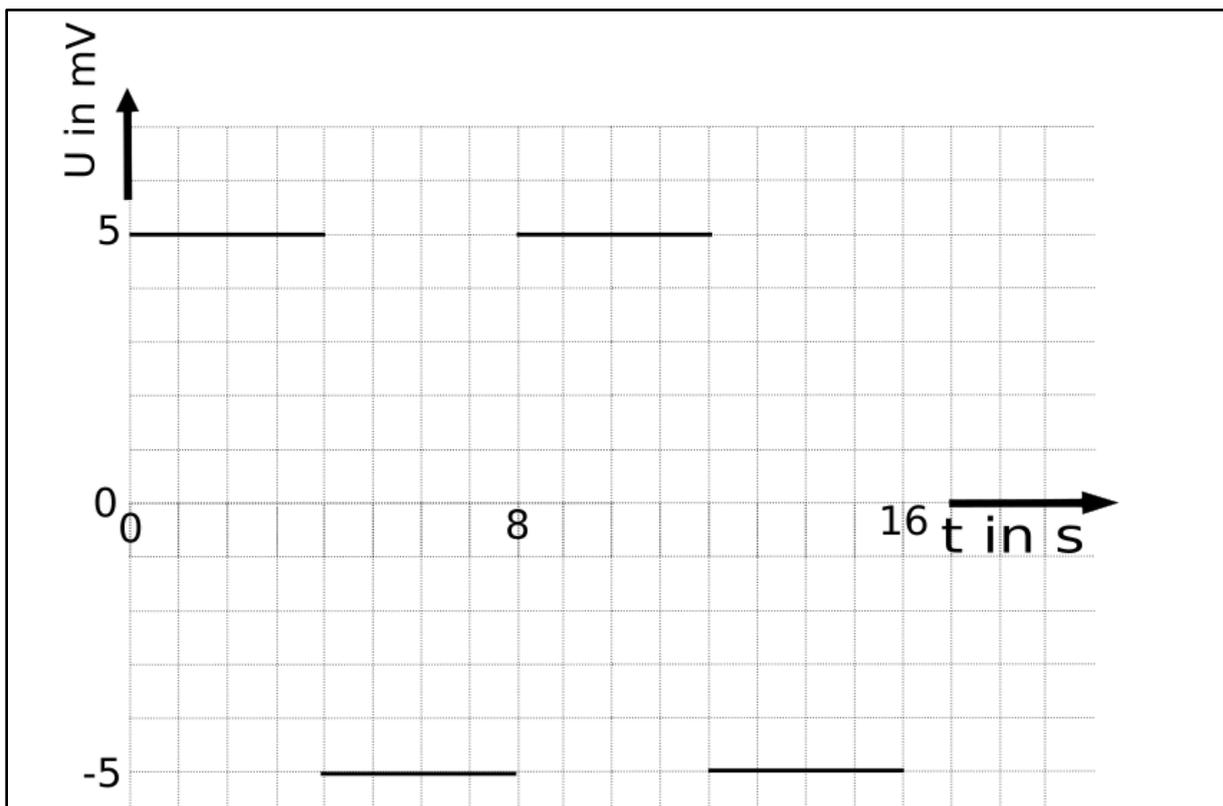
Der gezeigte Experimentaufbau ermöglicht es, die Bildung einer Induktionsspannung (an den Enden der Induktionsspule) zu analysieren, wenn sich die Intensität eines magnetischen Feldes der Stärke B über die Zeit verändert. Dies geschieht durch das zeitlich variierende (homogene) Magnetfeld, das von den Helmholtz-Spulen (Feldspule) erzeugt wird und die fest positionierte Induktionsspule mit n Windungen und einer gleichbleibenden Querschnittsfläche A durchdringt.

Das nachstehende Diagramm illustriert den idealisierten Verlauf der Feldstärke B im Inneren des Helmholtz-Spulenpaares. Die Fläche der Induktionsspule ist $0,1 \text{ m}^2$, und die Induktionsspannung weist einen konstanten (Betrags-)Wert von $|U_{\text{ind}}| = 0,005 \text{ Volt}$ auf.



d) Stellen Sie den Verlauf der Induktionsspannung in einem Zeit-Spannungs-Diagramm dar.

Zeit-Spannungs-Diagramm



e) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Windungen der Induktionsspule annähernd $n = 667$ beträgt.

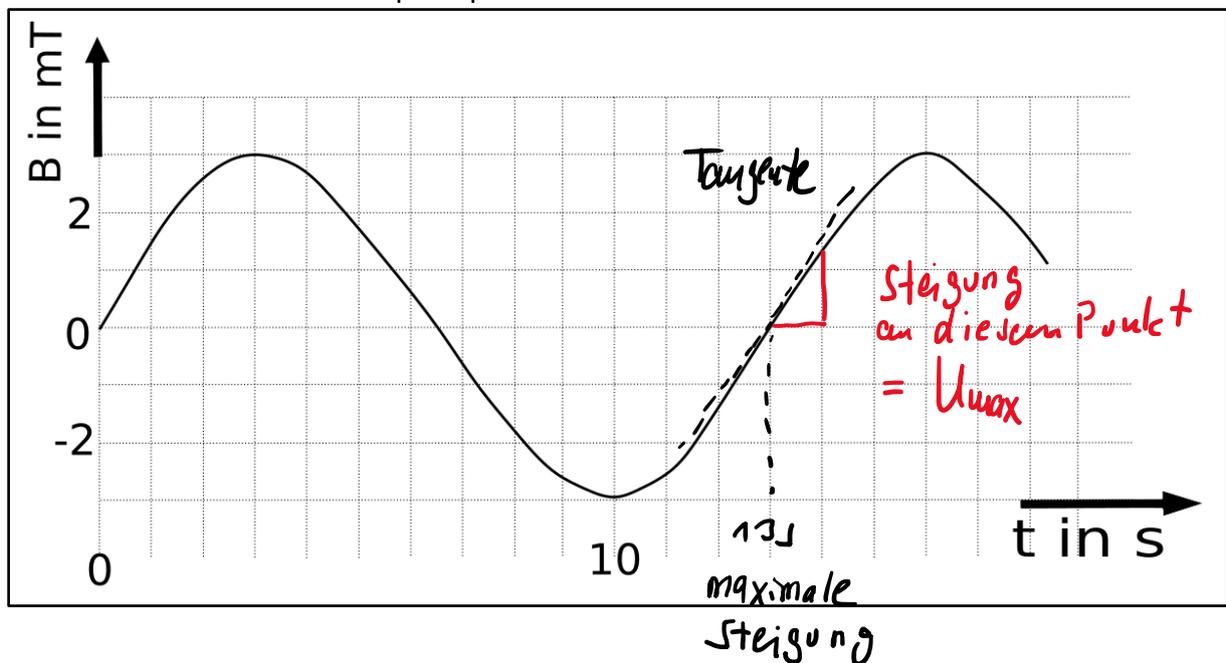
Formel:

$$|U_{ind}| = n \cdot A \left| \dot{B} \right| = n \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow n = \frac{|U_{ind}| \cdot \Delta t}{A \cdot \Delta B}$$

Einsetzen:

$$n = \frac{0,005 \text{ V} \cdot 4 \text{ s}}{0,01 \text{ m}^2 \cdot 0,003 \text{ T}} \approx 667$$

Das nächste Diagramm präsentiert einen weiteren idealisierten Verlauf der Magnetfeldstärke B im Inneren des Helmholtz-Spulenpaares.



f) Ermitteln Sie unter Verwendung dieser Abbildung den Höchstwert der Induktionsspannung

U_{max} .

$$u(t) = n \cdot B \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Allgemein gilt:} \\ u(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{array} \right.$$

$= U_{max}$

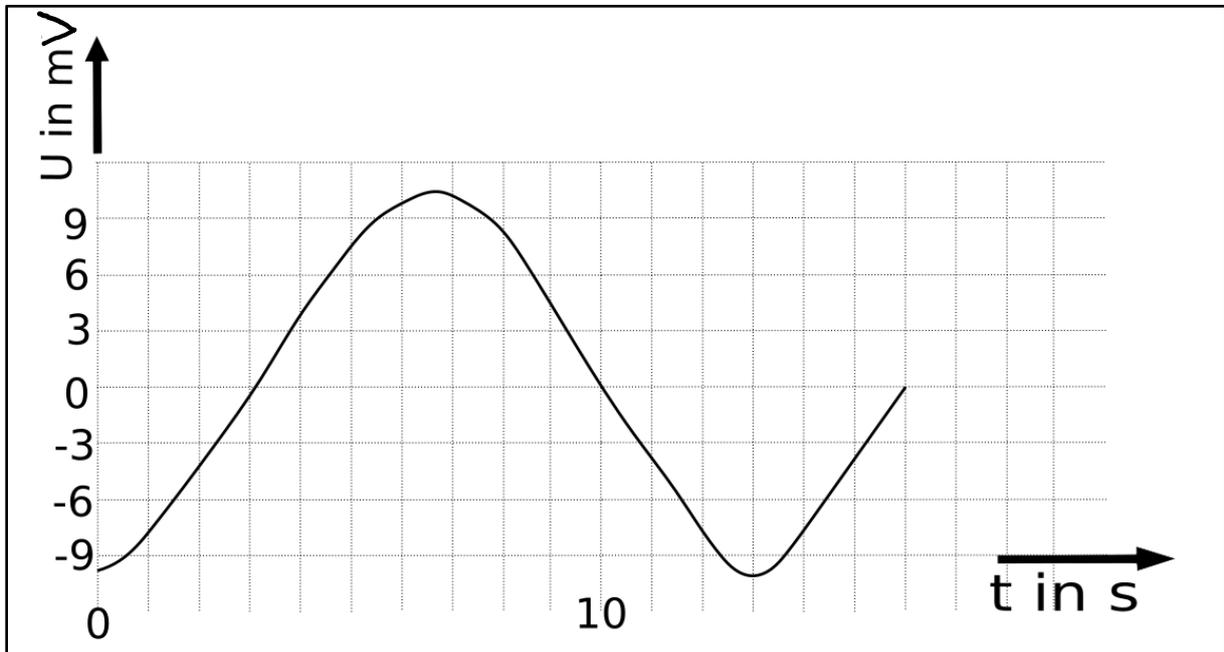
$$U_{max} = n \cdot B_{max} \cdot A \cdot \omega = n \cdot B \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

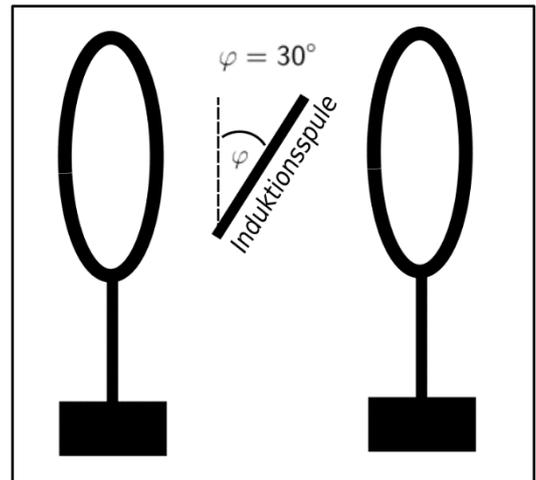
$$\underline{\underline{667}} \cdot \underline{\underline{0,003\text{ T}}} \cdot \underline{\underline{0,01\text{ m}^2}} \cdot \frac{\underline{\underline{2\pi}}}{\underline{\underline{135}}} = \underline{\underline{0,0097\text{ V}}}$$

g) Tragen Sie den Verlauf der Induktionsspannung in ein Zeit-Spannungs-Diagramm ein.

Zeit-Spannungs-Diagramm

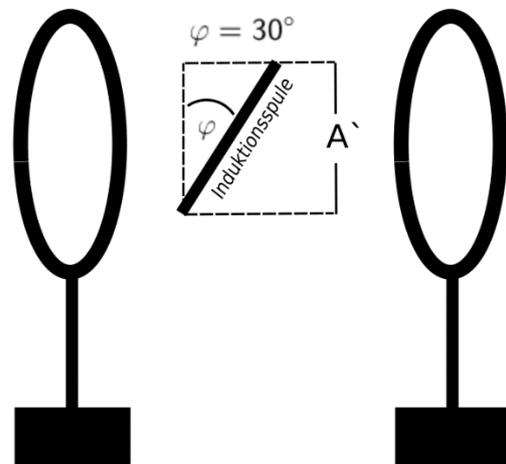


Im nächsten Experiment wird die Induktionsspule so positioniert, dass die Ebene der Spule einen Winkel von 30 Grad zur Vertikalen bildet.



h) Erklären Sie, weshalb die jetzt maximal messbare Induktionsspannung durch den Faktor $k = \cos(30^\circ)$ reduziert wird, verglichen mit der maximalen Spannung, die bei der ursprünglichen Ausrichtung ($\varphi = 0^\circ$) der Induktionsspule gemessen wurde.

Durch die Drehung der Spule um 30° treffen die magnetischen Feldlinien nicht mehr rechtwinklig auf die Spule auf. Dies führt zu einer Veränderung der effektiven Spulenfläche A , die senkrecht vom Magnetfeld durchdrungen wird. Um die neue effektive Spulenfläche A' zu bestimmen, kann die aktuelle Position der Spulenfläche auf eine Ebene projiziert werden, die senkrecht zu den magnetischen Feldlinien steht.



Mit der Formel für die magnetische Flussdichte

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\varphi$$

kann geschlussfolgert werden, dass sich die Induktionsspannung um den Faktor $k = \cos 30^\circ$ verringert.

Der zweite Teil des Induktionsgesetzes kann auch mit dem Experiment, das in der oberen Abbildung gezeigt wird, verifiziert werden. Ein gleichbleibendes, homogenes Magnetfeld wird durch das Helmholtz-Spulenpaar in allen Experimenten erzeugt. Durch den Einsatz eines Motors wird die Induktionsspule kontinuierlich mit einer festen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Bei einer passenden Auswahl des Anfangswinkels zum Zeitpunkt $t = 0$ s ergibt sich für die zeitabhängige induzierte Spannung U_{ind} in der Induktionsspule die Gleichung:

$$U_{\text{ind}}(t) = n \cdot B \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) +$$

$$u(x) \cdot v'(x)$$

i) Leiten Sie diese Gleichung her.

Hinweis: Die Polung der Induktionsspannung kann dabei vernachlässigt werden.

$$U_{\text{ind}} = -n \cdot B \cdot A_s \quad | \quad A_s = A \cdot \cos \alpha$$

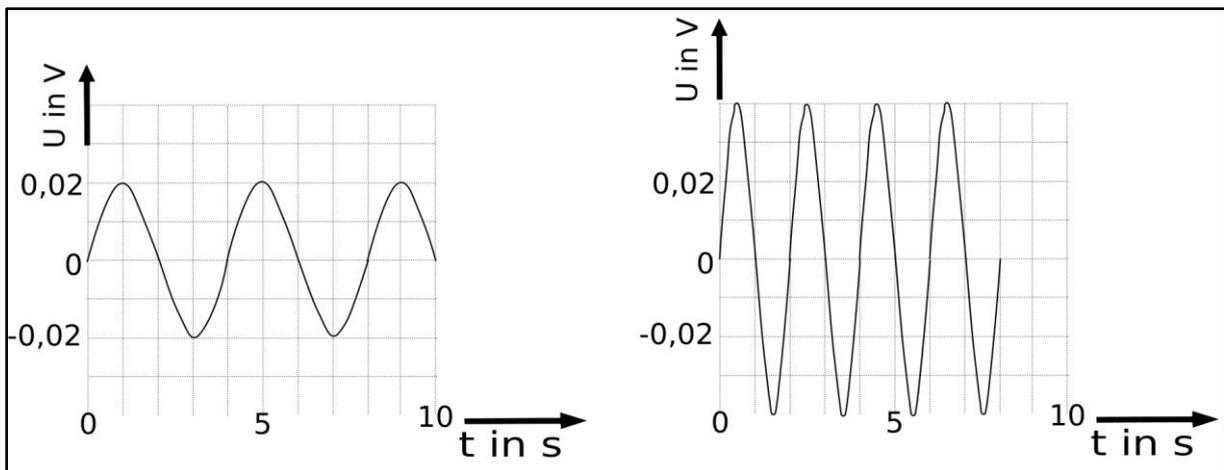
$$U_{\text{ind}} = -n \cdot B \cdot (A \cdot \cos \alpha) \quad | \quad A = \text{const.} \Rightarrow A' = 0 \quad | \quad \alpha = \omega \cdot t$$

$$U_{\text{ind}} = -n \cdot B \cdot A (\cos(\omega \cdot t)) \quad | \quad \text{ableiten (Kettenregel)} \quad | \quad f(x) = u \cdot (v(x))$$

$$U_{\text{ind}} = n \cdot B \cdot A \cdot \omega \sin(\omega \cdot t) \quad | \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$U_{\text{ind}} = n \cdot B \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

In dem nachfolgenden Experiment wird die Induktionsspule im gleichförmigen Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaares mit einer jeweils gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die folgenden Diagramme zeigen jeweils die Entwicklung der Induktionsspannung U_{ind} über die Zeit.



j) Erläutern Sie, welche spezifische Aussage des Induktionsgesetzes aus Teilaufgabe b) durch diesen Versuch getestet werden kann.

Der gezeigte Experimentaufbau ermöglicht es, die Bildung einer Induktionsspannung (an den Enden der Induktionsspule) zu analysieren, wenn sich die Fläche A, die vom konstanten magnetischen Fluss B durchzogen wird über die Zeit verändert. Dies geschieht durch Rotation der Induktionsspule.

k) Erläutern Sie, die Entstehung der beiden Diagramme.

Ist der Winkel zwischen Leiterschleife und Magnetfeldlinien 90° , so bewegen sich die Elektronen in der Leiterschleife bei einer Rotation zunächst einmal (fast) parallel zu den Magnetfeldlinien, was dazu führt das (fast) keine Lorentzkraft auf die Elektronen wirkt und es zu (fast) keiner Ladungstrennung bzw. Spannung kommt. Ist der Winkel 0° zwischen Leiterschleife und Magnetfeld wirkt bei einer weiteren Drehung eine deutlich größere Lorentzkraft auf die Elektronen, da sie sich (fast) genau senkrecht zum Magnetfeld bewegen. Das führt zu einer deutlich höheren (maximalen) Spannung. Im rechten Diagramm wurde die Spule schneller gedreht. Eine schnellere Drehung bedeutet eine größere induzierte Spannung.

I) Bestimmen Sie mithilfe des linken Diagramms die Stärke B des magnetischen Felds zwischen den beiden Helmholtzpulen.

allgemeine Formel: $U(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Formel:

$$U_{\text{ind}} = n \cdot B \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow B = \frac{U_{\text{ind,max}}}{n \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T}}$$

Ablezen aus dem Diagramm und einsetzen:

$$B = \frac{0,02 \text{ V}}{667 \cdot 0,01 \text{ m}^2 \cdot \frac{2\pi}{4 \text{ s}}} = 0,019 \text{ T}$$