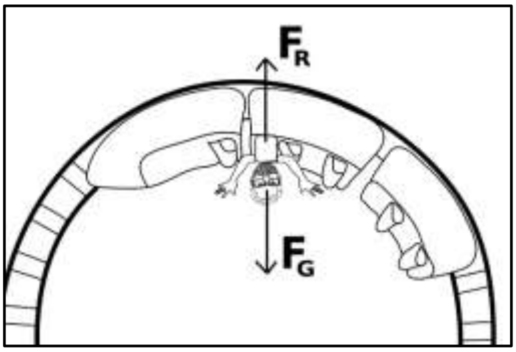
Aufgabenblatt – Rotationen (Musterlösung)

Gruppe 1

1. Warum fallen die Menschen im oberen Teil einer Loopingbahn nicht aus der Gondel?

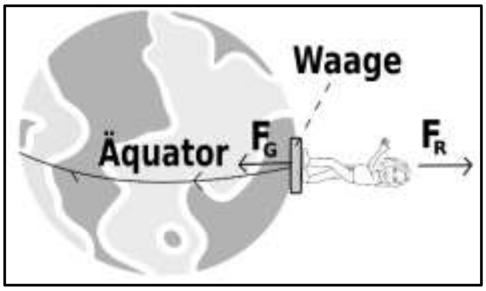


Lösung

Für die Loopingbahn gilt: die Radialkraft F_R sollte größer sein als die Gewichtskraft F_G. Wenn diese größer ist als die Gewichtskraft der Personen fallen sie nicht runter.

2. Wie oft müsste sich die Erde täglich um ihre Achse drehen, wenn dadurch die Erdanziehung am Äquator (g = 9,78 m/s^{-2}) aufgehoben werden soll? (Erdradius 6371 km)

Lösung



Damit ein Körper auf der Erde bleibt, muss ihn eine Kraft auf der Erde festhalten. Diese Kraft ist die Gravitationskraft F_G. Dreht sich die Erde schneller, steigt die Kraft, die notwendig ist, um ihn festzuhalten. Die Kraft, die einen Körper weg von der Erde zieht ist die Radialkraft F_R.

Bei einer bestimmten Umdrehungszahl der Erde ist die Radialkraft zu groß, dass sie von der Erdanziehung nicht mehr aufgebracht werden kann, der Körper fliegt fort. Sind die beiden Kräfte gleich groß, ist der Körper schwerelos. Dieser Zustand soll berechnet werden.

$$F_G = F_R$$

$$m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \left(\text{wobei } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)$$

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{r \cdot T^2}$$

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{g}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 6371000\,m}{9{,}78\,\frac{m}{s^2}}} = 5069\,s$$

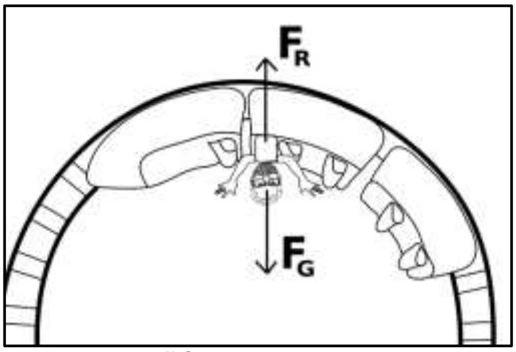
T = 1,4 h

Die Erde muss sich also in 1,4 h einmal um sich selbst drehen. Das bedeutet, dass sie in 24 Stunden 17 Umdrehungen machen muss.

Gruppe 2

3. Eine Achterbahn soll eine Loopingkurve durchfahren. Sie durchfährt den höchsten Punkt des Kreises mit der Geschwindigkeit 50 km/h. Wie groß darf der Radius der Kreisbahn höchstens sein, damit ein nicht angeschnallter Passagier nicht herausfällt?

Lösung



Damit die Achterbahn den obersten Punkt einer Loopingbahn durchlaufen kann, ohne runterzufallen, muss die Radialkraft F_R mindestens genau so groß wie die Gewichtskraft F_G sein. Ist sie zu klein, überwiegt die Gewichtskraft nach unten und der Wagen kann den Looping nicht durchfahren. Ist sie größer, ist das nicht schlimm. Die Leute werden dann stärker in den Wagen hineingedrückt.

Es gilt also:

$$F_G = F_R$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{v^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{v^2}{g}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{(13{,}9 \frac{m}{s})^2}{9{,}81 \frac{m}{s^2}}$$

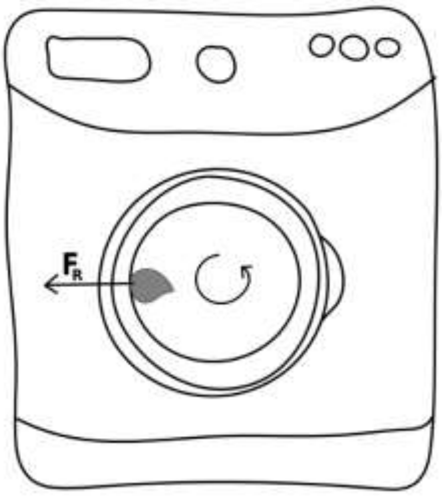
$$= 19{,}7\,m$$

Antwort: Der Radius der Bahn darf nicht größer als 19,7 m sein.

Gruppe 3

4. Eine Waschmaschine schleudert mit 800 Umdrehungen pro Minute die Wäsche in einer Trommel des Radius 26 cm. Mit welcher Kraft wird dabei ein Wassertropfen der Masse 1 g nach außen gedrückt? Welche Masse besitzt dieselbe Gewichtskraft?

Lösung



Der Wassertropfen macht in der Trommel eine Kreisbewegung. Dazu ist die Radialkraft notwendig, die durch die Trommelwand aufgebracht wird. Ist die Wand durchlässig, hat also Löcher, kann die Wand dort die Radialkraft nicht aufbringen und der Tropfen verlässt aufgrund seiner Trägheit die Trommel.
Der Tropfen selber spürt die Fliehkraft, die ihn nach außen zieht. Diese Kraft ist vom Betrag her der genau so groß wie die Radialkraft.
Über die Geschwindigkeit muss noch eine Aussage gemacht werden. Es gilt für die gleichförmige Kreisbewegung: n =Drehzahl = Frequenz 1/T.

$$F_R = F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

(wobei $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ oder $2 \cdot \pi \cdot r \cdot n$)

$$F_R = \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r^2 \cdot n^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow F_R = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot n^2$$

$$= 0{,}001\,\text{kg} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}26\,\text{m} \cdot \left(13{,}3\,\tfrac{1}{s}\right)^2$$

$$= 1{,}82\,\text{N}$$

Die dazu entsprechende Masse:

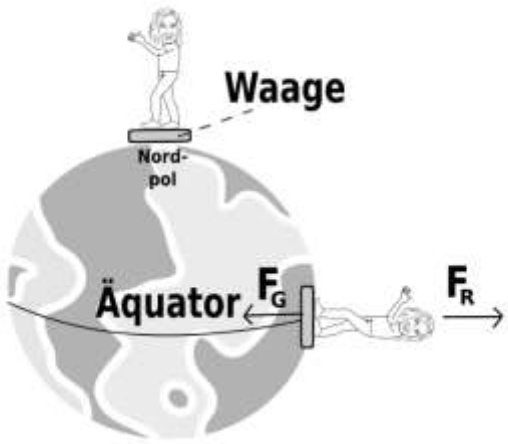
$$F_G = m \cdot g$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{1{,}82\,\text{N}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}185\,\text{kg}$$

Antwort: Der Tropfen wird mit einer Kraft von 1,82 N nach außen gedrückt. Das entspricht einer Masse von 185 g (dem 185-fachen seiner Ruhemasse!)

Gruppe 4

6. Durch die Drehung der Erde wirkt auf eine Person am Äquator eine Fliehkraft (im Gegensatz zu einer Person am Pol). Um wie viel Prozent ist daher das Gewicht einer Person am Äquator geringer als am Pol?



Lösung

Auf die Person am Äquator wirken zwei entgegengesetzte Kräfte. Zum Erdmittelpunkt hin wirkt die Gravitationskraft F_G und nach oben wirkt eine Radialkraft aufgrund der Trägheit der Masse.

$$F = F_G - F_R$$

$$F = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$m \cdot a = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$a = g - \frac{v^2}{r} \qquad \left(v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)$$

$$a = g - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{r \cdot T^2}$$

$$a = g - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

$$a = 9{,}83 \frac{m}{s^2} - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 6371000\,m}{(86400\,s)^2}$$

$$a = 9{,}83 \frac{m}{s^2} - 0{,}034 \frac{m}{s^2}$$

$$a = 9{,}796 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{9{,}796 \frac{m}{s^2}}{9{,}83 \frac{m}{s^2}} = 0{,}997$$

$$= 99{,}7\,\%$$

Eine Person am Äquator ist ca. 0,3 % leichter als am Nordpol.