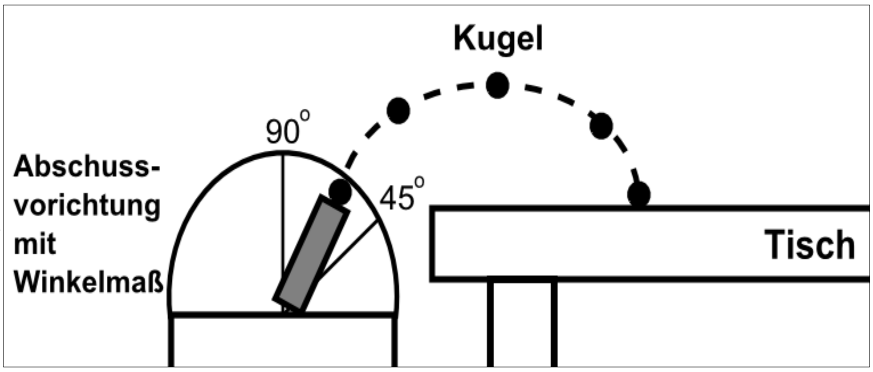
Mathematische Herleitung der maximalen Wurfweite in Abhängigkeit vom Abwurfwinkel

In einem Experiment haben wir immer wieder eine Kugel von der Höhe eines Tisches mit unterschiedlichen Abwurfwinkeln aber demselben Geschwindigkeitsbetrag v_0 abgeschossen.



Man konnte beobachten, dass der Winkel, bei dem die Kugel am weitesten fliegt, zwischen _____ und ______ liegt. Um die Frage, in welchem Winkel man theoretisch (*im Vakuum*) abwerfen sollte, um eine Kugel möglichst weit zu werfen, benötigen wir eine Gleichung, in der die Endweite s_x nur vom Winkel abhängig (v_0 = konstant) und t, der Zeitraum zwischen dem Abschuss und der Landung der Kugel ist.

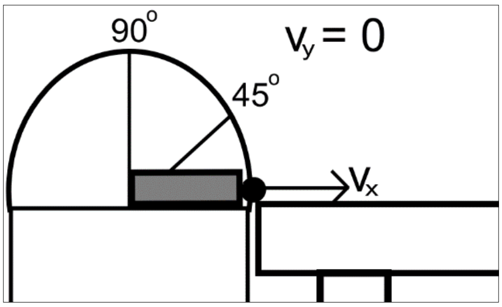
Gegeben sind die Gleichungen

$$(1)\ s_x = v_0 \cdot cos\alpha \cdot t$$

und

$$(2)\ s_y = v_0 \cdot sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Die Gleichung (1) können wir nicht einfach so nehmen, da t noch spezifiziert werden muss! Wir interessieren uns für den Zeitpunkt t_E (Zeit nach dem der Flug der Kugel zu Ende ist), an dem die Kugel wieder landet. Die Zeit, die die Kugel in der Luft ist, wird **ausschließlich** von der Geschwindigkeit $\mathbf{v_y}$ nach oben bestimmt. Ist die Geschwindigkeit v_y gleich 0, so kann v_x (Geschwindigkeit nach rechts) noch so groß sein, die Kugel ist nicht einen Augenblick in der Luft. Damit die Kugel sich in der Luft nach rechts bewegen kann, muss die Kugel also auch zu Beginn eine Geschwindigkeit nach oben besitzen. Die Kugel bewegt sich nur so lange in der Luft nach rechts, bis die Kugel wieder auf dem Tisch aufkommt, das heißt s_y (also die Höhe) wieder 0 wird.



Das nutzen wir aus, um die Zeit zu bestimmen, die die Kugel in der Luft ist. Wir setzen für s_y in die Gleichung (2) den Wert 0 ein, stellen die Gleichung nach t_E um und erhalten die Wurfzeit t_E:

$$0 = v_0 \cdot sin\alpha \cdot t_E - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_E^2 \quad (Rechenschritt: \ +\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_E^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_E^2 = v_0 \cdot sin\alpha \cdot t_E \quad (Rechenschritte: \ \cdot 2, : t_E, : g)$$

$$\Leftrightarrow t_E = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin\alpha}{g}$$

Mit t_E haben wir nun eine Gleichung, um zu bestimmen, wie lange die Kugel Zeit hat, sich nach rechts zu bewegen. Wir setzen t_E

$$\Leftrightarrow t_E = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin\alpha}{g} \cdot t$$

in die Gleichung (1) ein und erhalten:

$$s_x(t_E) = v_0 \cdot cos\alpha(\frac{2 \cdot v_0 sin\alpha}{g}) = \frac{v_0 \cdot v_0 \cdot 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}{g}$$

Es gilt (*mathematische Regel*)

$$2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha = sin2\alpha$$

Daraus folgt

$$s_x(t_E) = (\frac{v_0^2}{g})sin2\alpha$$

Der Teil der Gleichung

$$sin2\alpha$$

wird maximal, wenn man 45° einsetzt, da sin 90° = 1 ist.

Beim schiefen Wurf stellt sich bei festem Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die größte Wurfweite bei einem Wurf aus einer Höhe h_0, die der Landehöhe entspricht bei einem Wurfwinkel von 45° ein. Dies gilt allerdings nur, wenn die Flugbahn symmetrisch ist (ohne Luftreibung). Liegt dagegen die Abwurfhöhe h_0 oberhalb der Landehöhe (so wie bei den Bundesjugendspielen), so muss man unter einem etwas flacheren Winkel als 45° abwerfen.